

التمرين 1

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \arctan x \quad x \geq 0 \\ f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad x < 0 \end{array} \right.$$

لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

1-A- حدد مجموعة التعريف D_f ونهايات f عند محداثها.

2- أ حسب $f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right)$

3- ليكن قصور الدالة f على $]-\infty; -1[$

بين ان $]-\infty; -1[$ تقابل من J نحو مجال J يجب تحديده حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

B - لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1} \quad ; \quad u_0 = \frac{-1}{2}$$

1- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 < u_n < 0$

2- بين ان (u_n) متتالية متقاربة واستنتج $\lim u_n$

التمرين 2

لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = \frac{3}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n \quad v_0 = 2 \quad v_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{n+1} - v_n \quad \text{نضع}$$

1 - احسب v_2

2- بين ان (w_n) متتالية هندسية وأكتب حدها العام بدلالة n .

3 - بين أن $v_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} w_i$ وحدد v_n بدلالة n واستنتج $\lim v_n$

$$u = \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i}$$

ليكن z عددا عقديا مخالفا ل $-i$ نضع

التمرين 3

1- بين أن $|u| = |z|$

2- حدد A مجموعة النقط $M(z)$ حيث u عدد تخيلي صرف.

$$\begin{cases} f(x) = \arctan x & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} & x < 0 \end{cases}$$

1-A- نحدد مجموعة التعريف D_f ونهايات f عند محاداتها.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{2x}{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \in \mathbb{R} \text{ لدينا}^*$$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ إذن}$$

*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) \quad \text{-2 نحسب}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}$$

لدينا

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}\right) &= \frac{\tan\left(\arctan \frac{1}{4}\right) + \tan\left(\arctan \frac{3}{5}\right)}{1 - \left[\tan\left(\arctan \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \left[\tan\left(\arctan \frac{3}{5}\right)\right]} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}} \\ &= \frac{17}{17} \end{aligned}$$

$$\tan\left(\arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5}\right) = 1$$

وحيث أن $0 < \arctan \frac{3}{5} \leq \frac{\pi}{3}$ و $0 < \arctan \frac{1}{4} \leq \frac{\pi}{6}$ فإن $0 < \frac{3}{5} \leq \sqrt{3}$ و $0 < \frac{1}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

ومنه $0 < \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$ إذن $f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) = \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$

3- نبين ان g تقابل من $]-\infty; -1[$ نحو مجال J يجب تحديده

$$\forall x \in]-\infty; -1[\quad g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{ومنه} \quad]-\infty; -1[\quad \text{فصور الدالة } f \text{ على}$$

g دالة متصلة على $]-\infty; -1[$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\quad g'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \quad \text{لدينا}$$

و منه $\forall x \in]-\infty; -1[\quad g'(x) < 0$ إذن g تناقصية قطعاً على $]-\infty; -1[$ و $g(]-\infty; -1[) =]-1; 0[$

إذن g تقابل من $]-\infty; -1[$ نحو $J =]-1; 0[$

*** نحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $]-1; 0[$**

ليكن $x \in]-1; 0[$ و $y \in]-\infty; -1[$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{y^2+1} = x$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - 2y + x = 0$$

ليكن Δ' المميز المختصر للمعادلة $xy^2 - 2y + x = 0$

ومنه $\Delta' = 1 - x^2$ لدينا $\Delta' > 0$ $\forall x \in]-1; 0[$

$$\text{ومنه} \quad y = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\text{لدينا} \quad x \in]-1; 0[\quad \text{نعتبر} \quad y = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$-1 - y = -1 - \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{-(x+1 + \sqrt{1-x^2})}{x}$$

$$\frac{-(x+1 + \sqrt{1-x^2})}{x} > 0 \quad \text{إذن} \quad 0 < x+1 < 1 \quad \text{فان} \quad -1 < x < 0 \quad \text{وحيث أن}$$

ومنه $y < -1$

$$\forall x \in]-\infty; -1[\quad g^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{إذن}$$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1} \quad ; \quad u_0 = \frac{-1}{2} \quad \text{- B}$$

1- نبين أن $-1 < u_n < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{-1}{2}$ ومنه $-1 < u_0 < 0$

نفترض $-1 < u_n < 0$ عبارة صحيحة حتى الرتبة n

و نبين أن $-1 < u_{n+1} < 0$

لدينا $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1}$ وحيث $u_n < 0$ فإن $u_{n+1} < 0$

وحيث أن $-1 < u_n < 0$ فإن $u_{n+1} + 1 = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1} + 1 = \frac{(u_n + 1)^2}{u_n^2 + 1} > 0$

أي $-1 < u_{n+1} < 0$ و بالتالي

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 < u_n < 0$

2- بين ان (u_n) متتالية متقاربة واستنتج $\lim u_n$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n^2 + 1} - u_n = u_n \left(\frac{1 - u_n^2}{u_n^2 + 1} \right)$

وحيث أن $-1 < u_n < 0$ فإن $u_n \left(\frac{1 - u_n^2}{u_n^2 + 1} \right) < 0$

اذن (u_n) تناقصية و بما أن (u_n) مصغورة فإن (u_n) متقاربة

* نستنتج $\lim u_n$

لدينا $\forall x \in]-1; 0[\quad f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ ومنه $\forall x \in]-1; 0[\quad f'(x) > 0$

وبالتالي f تزايدية قطعاً على $]-1; 0[$ و متصلة على $]-1; 0[$ ومنه $f(]-1; 0[) =]-1; 0[$

و بما أن (u_n) متقاربة فان نهاية (u_n) حل المعادلة $f(x) = x$ على $]-1; 0[$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = x \Leftrightarrow x \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

وحيث أن (u_n) تناقصية فان $\lim u_n = -1$

التمرين 2

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = \frac{3}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n \quad v_0 = 2 \quad v_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

1 - نحسب v_2

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

2- نبين ان (w_n) متتالية هندسية و نكتب حدها العام بدلالة n .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{3}{2}v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n - v_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}w_n$$

اذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $w_0 = v_1 - v_0 = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3 - نبين أن $v_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} w_i$ وحدد v_n بدلالة n واستنتج $\lim v_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

$$w_0 = v_1 - v_0$$

$$w_1 = v_2 - v_1$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$w_{n-1} = v_n - v_{n-1}$$

بجمع أطراف المتساويات نحصل على $\sum_{i=0}^{n-1} w_i = v_n - v_0$ أي $v_n = v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} w_i$

$$\text{اذن} \quad v_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} w_i$$

*** نحدد v_n بدلالة n واستنتج $\lim v_n$**

لدينا (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $w_0 = 1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \text{ ومنه}$$

$$\text{اذن} \quad v_n = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{وحيث} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{ فان} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$$

التمرين 3

ليكن z عددا عقديا مخالفا ل $-i$ نضع $u = \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i}$

1- نبين أن $|u| = |z|$

$$\text{لدينا} \quad u = \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} \text{ ومنه} \quad |u| = \left| \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} \right| = \frac{|z| |\bar{z}-i|}{|z+i|}$$

وحيث أن $\overline{\bar{z}-i} = z+i$ فان $|\bar{z}-i| = |z+i|$

$$\text{اذن} \quad |u| = |z|$$

2- نحدد A مجموعة النقط $M(z)$ حيث u عدد تخيلي صرف.

ليكن z عددا عقديا مخالفا ل $-i$

$$M(z) \in A \Leftrightarrow u \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow u = -\bar{u}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z(\bar{z}-i)}{z+i} = -\frac{\bar{z}(z+i)}{\bar{z}-i}$$

$$\Leftrightarrow z(\bar{z}-i)^2 + \bar{z}(z+i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z}^2 - 2iz \cdot \bar{z} - z + z^2 \cdot \bar{z} + 2iz \cdot \bar{z} - \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z}^2 - z + z^2 \cdot \bar{z} - \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z}(z + \bar{z}) - (z + \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + \bar{z})(z \cdot \bar{z} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + \bar{z}) = 0 \quad \text{ou} \quad (z \cdot \bar{z} - 1) = 0$$

نضع $z = x + iy$ حيث $(x, y) \neq (0, -1)$ ومنه:

$$M(z) \in A \Leftrightarrow x + y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$M(z) \in A \Leftrightarrow x + y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 1$$

نعتبر (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1 والمستقيم (D): $x + y = 0$

نلاحظ أن $B(0; -1) \in (C)$

$$A = [(C) \cup (D)] - \{B\} \quad \text{إذن}$$