تمرين رقم 1 : (8 نقط ونصف)

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 3}{2(v_n + 1)} \end{cases}$$

1) أحسب v_1 و v_2 .

2) أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n > 1$

ب- أدرس رتابة (v_n) .

ج- استنتج أن (v_n) متقاربة .

3) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{2(x+1)}$$

أ- بين أن f متصلة على المجال $]1,+\infty[$.

ب- بين أن : $f(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$

4) حدد نهاية (v_n) .

5) ليكن g قصور f على المجال $I =]-1,1]$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين رقم 2 : (3 نقط)

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$.ليكن p و q عددين حقيقيين موجبين قطعا. بين أن :

$$\exists c \in [a,b] \quad f(c) = \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q}$$

تمرين رقم 3 : (4 نقط ونصف)

1) ليكن α عددا حقيقيا بحيث $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

بين أن : $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2})$

(يمكن استعمال العلاقتين التاليتين :

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \; ; \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$)

2) نضع $\alpha = \operatorname{Arctan} x$.

أ – بين أن : $\sqrt{1+x^2} - x = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})$

ب- استنتج أن : $\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$

3) بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{2}$$

تمرين رقم 4 : (4 نقط)

1) حل في المجموعة $I =]2,+\infty[$ المعادلة :

$$3 - \tan^2(\frac{\pi}{x}) = 0$$

2) لتكن الدالة العددية f المعرفة على I بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - 2}{3 - \tan^2(\frac{\pi}{x})}$$

أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي :

$$D_f =]2,3[\cup]3,+\infty[$$

ب- بين أنه يمكن تمديد الدالة f بالاتصال في النقطة $x_0 = 3$